

**Trabajo con patrones a través de
actividades basadas en el ajedrez.
Un estudio sobre estrategias y
niveles de razonamiento de los
estudiantes de Educación Primaria.**

Working with patterns through chess-based activities.
A research on strategies and reasoning levels
of primary school students.

Dámaso Miguel Vera Sáez-Benito, Alberto Arnal Bailera

Resumen

Desde la disposición de elementos arquitectónicos hasta las fases de la luna, en la vida cotidiana encontramos una gran cantidad de ejemplos de lo que es un patrón interesante para un estudiante de Primaria. Por ello, el NCTM (2000) considera necesario trabajar este contenido a lo largo de la etapa de Primaria. En este estudio se ha analizado la potencialidad del juego del ajedrez en la búsqueda de patrones. Los objetivos planteados han sido determinar las estrategias y clasificar los niveles de razonamiento del alumnado cuando resuelven actividades de patrones basadas en el ajedrez. Para llevar a cabo esta tarea, se diseñó una secuencia de actividades que presenta patrones visuales y numéricos ordenados de forma progresiva desde una mayor presencia de elementos visuales, hacia un predominio de aspectos numéricos. Los resultados de este trabajo apuntan a que el ajedrez favorece la utilización de una variedad de estrategias, algunas incluso distintas a las presentes en la literatura previa. Los estudiantes se apoyan en la geometría del tablero cuando trabajan con ambos tipos de patrones (visuales y numéricos). Sin embargo, los resultados muestran que el nivel de razonamiento de los alumnos aumenta cuando resuelven actividades de patrones numéricos.

Palabras clave: patrones, matemáticas, ajedrez, estrategias y razonamiento.

Abstract

From the arrangement of architectural elements to the phases of the moon, in everyday life we find a large number of examples of what is an interesting pattern for a primary school student. For this reason, the NCTM (2000) considers it necessary to work on this content throughout the primary school stage. In this study we have analysed the potential of the game of chess in the search for patterns. The objectives were to determine the strategies and classify the students' levels of reasoning when solving chess-based pattern activities. To carry out this task, a sequence of activities was designed that presents visual and numerical patterns ordered progressively from a greater presence of visual elements to a predominance of numerical aspects. The results of this work suggest that chess favours the use of a variety of strategies, some of them even different from those found in previous literature. Students rely on the geometry of the board when working with both types of patterns (visual and numerical). However, the results show that the students' level of reasoning increases when they solve numerical pattern activities.

Key words: patterns, mathematics, chess, strategies and reasoning.

Índice

1. Introducción	7
2. Marco Teórico	8
2.1. Patrones: niveles de razonamiento y estrategias	8
2.2. Ajedrez en la educación matemática	10
3. Método	12
3.1. Participantes.....	12
3.2. Instrumento.....	12
3.3. Variables	14
3.4. Procedimiento	16
4. Resultados	16
5. Discusión y conclusiones	20
Referencias	24
Anexos.....	28
Anexo 1. Primera actividad.....	28
Anexo 2. Segunda actividad.....	30
Anexo 3. Tercera actividad	32
Anexo 4. Cuarta actividad.....	34



*“It’s a great huge game of chess that’s
being played—all over the world—if this is
the world at all, you know. Oh, what fun it is!”*

(Alice’s Adventures in Wonderland, Lewis Carroll)

1. Introducción

Cada vez es más común el uso de recursos lúdicos para la enseñanza de las matemáticas en la etapa de Educación Primaria (Bragg, 2007). Hay gran cantidad de materiales disponibles, entre los que destaca el ajedrez. Varias investigaciones sostienen la importancia de este juego como recurso educativo (Kazemi *et al.*, 2012; Sigirtmac, 2016; Poston y Vandenkieboom, 2019). A través del ajedrez podemos introducir diversos contenidos matemáticos (Gairín y Fernández, 2010).

En nuestra vida cotidiana están muy presentes los patrones, ya sea en la decoración de una casa o el estampado de una camiseta, incluso podemos encontrarlos en la naturaleza, por ejemplo en las fases de la luna o en el pelaje de algunos animales. Entendemos por patrón aquella sucesión de elementos que se construye siguiendo una regla (Resnik, 1981). Tanto el currículo español como el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) consideran necesario que los alumnos trabajen con patrones a lo largo de la Educación Primaria.

Como ya se ha comentado, existen numerosas investigaciones acerca de ajedrez educativo. Además, hay estudios acerca del tratamiento de patrones en la Educación Primaria (Vale y Cabrita, 2008; Merino *et al.*, 2013; Jurdak y El Mouhayar, 2014; Barbosa y Vale, 2015; Zapatera, 2018b), pero no se han encontrado muchas investigaciones que analicen las potencialidades de ambos temas en conjunto. Por ello, desde este trabajo se pretende diseñar una secuencia de actividades basadas en el ajedrez y analizar si su realización contribuye a la mejora del razonamiento y a la adquisición de estrategias para la búsqueda de patrones en estudiantes de Educación Primaria. Para responder a esta cuestión, se han planteado los siguientes objetivos:

- Determinar qué estrategias aparecen cuando los estudiantes de Primaria resuelven actividades de patrones visuales y numéricos basadas en el ajedrez.
- Clasificar los distintos niveles de razonamiento del alumnado cuando resuelven actividades de patrones visuales y numéricos basadas en el ajedrez.

Otros estudios enfocan el uso del ajedrez como recurso para la enseñanza de conceptos matemáticos generales, como el cálculo mental y las operaciones aritméticas (Gairín y Fernández, 2010), desde esta investigación nos proponemos analizar en profundidad el trabajo de un contenido específico, como son los patrones, a través del juego de ajedrez.

2. Marco Teórico

2.1. Patrones: niveles de razonamiento y estrategias

Diversos currículos de matemáticas en todo el mundo dan una gran importancia al trabajo con patrones: el NCTM (2000) establece que la búsqueda de patrones es uno de los principales resultados de aprendizaje en la Educación Primaria, idea que también sostiene el currículo español. En este último caso la realidad de las aulas es bien distinta, dado que se otorga una mayor prioridad a otros contenidos, como la aritmética (Molina, 2009). En otros países como en Australia es común realizar actividades como estudiar patrones visuales compuestos por distintas formas y colores (Warren, 2005).

El trabajo con patrones implica la búsqueda de una regla general que permita obtener de manera eficaz los elementos de una sucesión. En particular, Reid (2002) asume que los alumnos esperan encontrar en las matemáticas regularidades que les ayuden a desenvolverse y a progresar en el razonamiento. Resnik (1981) también considera a las matemáticas como una ciencia de patrones y define el término patrón como la “entidad compleja que consiste en uno o más objetos, llamados posiciones, que se encuentran en varias relaciones” (p. 532).

El pensamiento visual está muy presente en los matemáticos, pero esto no se refleja en la enseñanza de esta área (Hershkowitz *et al.*, 1996). Thornton (2001) da varias razones para considerar el pensamiento visual en la enseñanza de las matemáticas: superar la dependencia del álgebra y mejorar las habilidades de resolución de problemas. La visualización de un patrón facilita la representación simbólica del patrón numérico, esta relación entre lo visual y lo simbólico logra que ambos procesos queden al mismo nivel (Healy y Hoyles, 1999).

A la hora de continuar una secuencia de figuras, los estudiantes han de percibir una regularidad basada en dos estructuras diferentes, una espacial y otra numérica. Radford (2010) explica que la estructura espacial surge de la posición de las figuras, mientras que la estructura numérica nace del número de las mismas. En relación a esto, Rivera (2010) defiende que aquellos estudiantes que no coordinen la estructura numérica con la espacial, serán capaces de dibujar el número correcto de elementos que forman un término de la sucesión, pero no los colocarán de la forma adecuada. Por lo contrario, este autor expone que quienes no coordinen la estructura espacial con la numérica, colocarán los elementos adecuadamente, pero no dibujarán el número correcto de los mismos.

Podemos agrupar los patrones atendiendo a la siguiente clasificación (Morales *et al.*, 2017):

- Patrones visuales o espaciales: la regularidad se percibe mediante la vista, por lo que pertenecen al campo de la geometría.
- Patrones lineales o de repetición: se repite de forma cíclica una unidad, a la que se conoce como núcleo.
- Patrones numéricos: son aquellos que se construyen con números, en estos es interesante conocer el valor numérico de los elementos en cada posición.
- Patrones lógicos: el razonamiento está basado en la igualdad y la diferencia de ciertos atributos entre los objetos.

Esta clasificación no es excluyente, ya que un mismo patrón puede pertenecer a dos tipos al mismo tiempo, como es el caso de un patrón visual y lógico.

Radford (2002) estableció que la generalización de patrones fomenta el pensamiento algebraico en la etapa de Primaria. Aunque el álgebra suele reservarse para etapas posteriores, hay investigaciones que avalan el tratamiento de este contenido desde la Educación Primaria (Zapatera, 2018a). Por ello son muchos los países que ya han comenzado a considerar la relación entre los patrones y el álgebra en sus currículos. Hay dos corrientes que apoyan esta idea, por un lado está la pre-álgebra, que sirve de puente entre la aritmética y el álgebra hacia final de la Primaria. Por otro lado aparece el álgebra temprana (*early algebra*), cuyo propósito es más ambicioso y aspira a que se trabaje el álgebra desde los primeros cursos de la etapa de Primaria (Zapatera, 2018b). Vale y Cabrita (2008) dejaron constancia de que los patrones numéricos son más sencillos que los visuales, debido a que en estos últimos es más complicado obtener una fórmula algebraica que permita encontrar cualquier término de la secuencia.

Existen dos tipos distintos de generalización: cercana y lejana. La primera hace referencia a la búsqueda de elementos próximos que pueden hallarse a través del conteo, de dibujos o de tablas. Por su parte, la generalización lejana se refiere a aquellos patrones en los que es necesario hallar la regla general (Stacey, 1989). Un aspecto importante en la generalización es la flexibilidad en el uso de estrategias, es decir la habilidad para reemplazar una estrategia por otra cuando se modifica la demanda de la tarea (Nilsson y Juter, 2011).

Zapatera (2018b) estableció una graduación del aprendizaje de los patrones. Describió nueve niveles acumulativos que pueden agruparse en tres etapas, según las capacidades

mostradas por los alumnos: primera, continuar la secuencia para términos cercanos atendiendo al número de elementos en un término, pero no a la estructura espacial de las figuras; segunda, coordinar estructuras numéricas y espaciales, y expresar verbalmente una fórmula explícita y tercera, reconocer la relación funcional en casos específicos o expresar verbalmente la regla general como una relación funcional invirtiendo la relación funcional en algunos casos (Callejo y Zapatera, 2017). Estos niveles han servido a Ramírez *et al.* (2020) para comprobar que los alumnos de 4º de Primaria son capaces de expresar la regla general verbalmente mejor que los de 3º, aunque muy pocos de 4º logran expresar la regla general de forma algebraica.

Existen evidencias de que el nivel de razonamiento para las tareas de generalización inmediata y cercana es mayor que el de las tareas de generalización lejana, esto apoya la idea de que las primeras resultan más sencillas a los estudiantes (Jurdak y El Mouhayar, 2014). En un estudio realizado por Cañadas *et al.* (2008), se encontró que la mayoría de estudiantes que expresaban la generalización lo hacían de forma verbal. El predominio de la generalización verbal sobre la algebraica hace pensar que esta resulta más sencilla para los estudiantes.

Algunas de las estrategias que utilizan los alumnos de Educación Primaria en una tarea de generalización son el conteo, cuando los números son pequeños y operaciones numéricas, cuando el nivel de complejidad aumenta (Merino *et al.*, 2013). Según estos autores, la estrategia que más errores genera es la multiplicación. Además, los alumnos suelen tener más dificultades cuando utilizan representaciones numéricas, ya que las gráficas conducen generalmente a respuestas correctas. Barbosa y Vale (2015) explican que para descubrir términos cercanos en una secuencia, los alumnos utilizan principalmente las estrategias de conteo y recursivas. Mientras que en las generalizaciones lejanas hacen un mayor uso de la estrategia explícita.

2.2. Ajedrez en la educación matemática

El juego, considerado como recurso educativo, está estrechamente relacionado con la matemática en general y con el razonamiento en particular, tanto que se considera que los juegos sostienen el razonamiento hipotético (Bragg, 2007). En esta simbiosis que se da entre las matemáticas y el juego, hay veces que se vuelve complejo discernir cuál de los dos aporta el beneficio y cuál lo aprovecha, como sucede cuando aparece el cálculo en diversos juegos de cartas o de dados (Bishop, 1998).

De entre todos los juegos que podemos utilizar resalta el ajedrez, ya que contribuye a la mejora del rendimiento escolar, la concentración, la memoria y la creatividad (Gliga y Flesner, 2014). En un estudio realizado por Sigirtmac (2016) con niños de 5 años, se encontraron diferencias estadísticamente significativas en las puntuaciones del *Torrance Tests of Creative Thinking*, siendo estas mejores en el grupo que había recibido entrenamiento de ajedrez. Poston y Vandenkieboom (2019) comprobaron que los alumnos que practican ajedrez habitualmente obtenían mejores resultados en la asignatura de matemáticas. Un estudio llevado a cabo en Dinamarca mostró que la sustitución de la clase tradicional de matemáticas por otra basada en ajedrez, tendía a mejorar los resultados de los alumnos (Rosholm *et al.* 2017).

La introducción de recursos lúdicos como el ajedrez en la clase de matemáticas puede orientar las clases hacia las inquietudes del alumnado y aumentar la motivación del grupo (Gairín y Fernández, 2010). Pawa *et al.* (2020) sostienen que el uso de juegos de mesa en el aula, entre los que mencionan el ajedrez, aumenta la satisfacción del alumnado y observaron que cuando los alumnos están jugando, aprenden sin darse cuenta de ello dado que los juegos tienen la facultad de captar la atención de aquellos que los están practicando.

Kerner (1994) aportó la siguiente definición para los patrones básicos de ajedrez: “una determinada configuración mínima de un pequeño número de piezas y casillas que describe una sola característica ajedrecística destacada” (p. 243). Los maestros de ajedrez tienen la capacidad de recordar la posición de las piezas sobre el tablero mejor que el resto de jugadores (Presmeg, 1992). El ajedrez favorece la comprensión de aspectos matemáticos abstractos, los jugadores de ajedrez deben elegir la estrategia más adecuada en cada momento y hacer uso de la generalización para actuar ante determinadas situaciones (Sala *et al.*, 2015).

El ajedrez ha manifestado ser útil para introducir la idea de patrón en la Educación Primaria. Maz-Machado y Jiménez-Fanjul (2012) diseñaron una actividad que consistía en contar el número de escaques a los que pueden acudir el alfil, la dama y el caballo desde cada casilla del tablero. Con esto los alumnos comprobaban que los patrones numéricos y geométricos que se forman son distintos. Ferreira y Palhares (2008) observaron que los jugadores de ajedrez resolvían mejor los patrones numéricos que los geométricos.

3. Método

En base a los objetivos planteados en este estudio, se ha optado por emplear una metodología cualitativa en la investigación, se trata de un estudio descriptivo y exploratorio (Pérez, 2004).

3.1. Participantes

En este estudio han participado 46 estudiantes que cursaban 4º de Educación Primaria en el momento de la recogida de los datos. Se trata de un colegio público ubicado en la ciudad de Zaragoza, en el que el alumnado practica ajedrez durante toda su escolarización, por lo que los estudiantes ya tienen conocimientos previos acerca de este juego cuando se comienza la propuesta de intervención. Además, en estas sesiones estuvo presente la maestra con la que trabajan ajedrez.

3.2. Instrumento

Se ha diseñado una secuencia de actividades de ajedrez en las que se trabajan distintos tipos de patrones, las actividades planteadas son matemáticamente ricas (Yeo, 2007). A continuación se presenta una parte de dicha intervención¹. Todos los patrones con los que se trabaja tienen un componente visual en mayor o menor medida, por el hecho de utilizar el recurso del ajedrez. Por otro lado, algunos de ellos precisan de la utilización de números. Por ello, se ha optado por ordenar las actividades desde aquellas con una máxima presencia de patrones visuales hasta aquellas con una mínima. En todas las actividades se pide a los alumnos que expliquen el proceso seguido o el razonamiento empleado.

En la primera actividad (ver Figura 1), que recoge los patrones visuales, se muestra un tablero en el que se ha colocado un caballo. El alumno tiene que encontrar las casillas que puede alcanzar si realiza uno, dos y tres movimientos. A continuación, se les pide que encuentren cuántos movimientos tienen que realizar para alcanzar las casillas a las que la pieza todavía no ha llegado, que son las cuatro esquinas.

¹ Ver Anexos para comprobar cómo son las actividades que realizaron los alumnos.

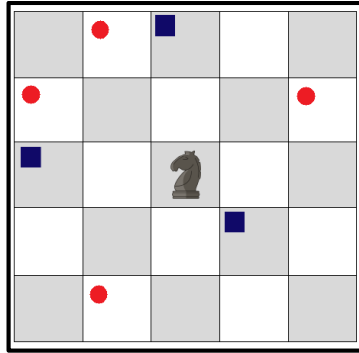


Figura 1. Primera actividad

En la segunda actividad (ver Figura 2), que contiene un gran número de elementos visuales, pero ya se incluyen algunos aspectos numéricos, el alumno tiene que encontrar el número de casillas que puede alcanzar el rey si realiza tres movimientos.

Este rey quiere alejarse todo lo posible. Ayúdalo a escapar:

Si realiza un movimiento, tiene 8 casillas para elegir.

Si realiza dos movimientos, tiene 16 casillas para elegir.

Si realiza tres movimientos, ¿cuántas casillas tiene para elegir?

Figura 2. Segunda actividad

La tercera actividad (ver Figura 3) incluye una presencia mayor de elementos numéricos que visuales, en primer lugar se trabaja con un patrón visual que después se transforma en otro numérico. El alumno tiene que encontrar la casilla a la que va a llegar el alfil, teniendo en cuenta que siempre se desplaza de la misma manera. Tras ello, se solicita que nombren las casillas por las que pasa la pieza y que encuentren las dos siguientes en caso de que el tablero no se acabara.

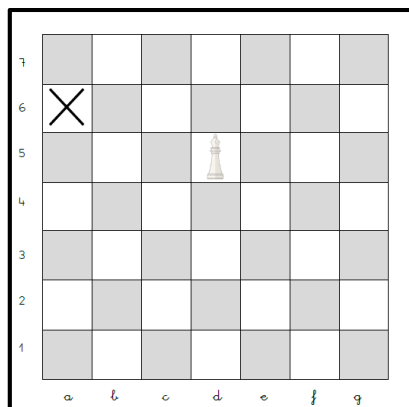


Figura 3. Tercera actividad

La cuarta actividad (ver Figura 4) presenta únicamente patrones numéricos. No obstante, previamente se trabaja con una actividad de patrones visuales relacionada, en la que los alumnos tienen que señalar aquellas casillas que amenazan determinadas piezas. Tras ello, se pide a los alumnos que completen tres tableros con el número de casillas amenazadas por cada pieza desde cada posición.

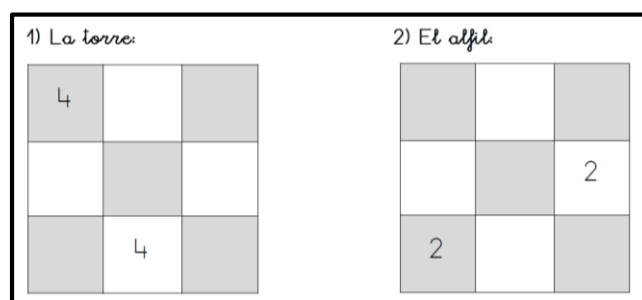


Figura 4. Cuarta actividad

Es preciso comentar que en estas actividades hay pocas cuestiones relacionadas con la generalización debido a la corta edad de los estudiantes para los cuales fue diseñada. En caso de adaptarlos para alumnos de cursos superiores, sería interesante incluir alguna tarea de este tipo.

3.3. Variables

Las variables de estudio son las estrategias empleadas en la búsqueda de patrones y el nivel de razonamiento alcanzado por los alumnos. En relación al tipo de estrategias, se incluyen diversas categorías extraídas de la literatura previa (Merino *et al.*, 2013; Barbosa y Vale, 2015), a las que se han añadido otras propias del ajedrez, concretamente la antepenúltima y la penúltima, que emergen de forma inductiva a partir de nuestros datos. Se muestran en orden de la más elemental hasta la más elaborada:

- Ensayo-error: obtiene la solución probando diversas alternativas hasta obtener la que considera más adecuada.
- Repetición de enunciado: repite las instrucciones dadas en el enunciado de la actividad.
- Conteo: cuenta las casillas por las que tiene que pasar.
- Operación sin uso de patrón: utiliza alguna operación que no puede relacionarse con un patrón para la cuestión.
- Paso anterior: atiende únicamente al paso que le antecede.
- Recursiva: atiende a los movimientos que realiza desde la situación inicial.
- Situación real de juego: procede como si estuviera realizando una partida de ajedrez.
- Distribución geométrica: observa cómo están distribuidas las figuras geométricas sobre el tablero de ajedrez, y en base a ello encuentra cómo continúa el patrón.
- Uso de patrón: identifica algún patrón, que puede ser completo/incompleto y apropiado/inapropiado.

Atendiendo a la capacidad de razonamiento del alumnado, se parte de las siguientes categorías (Zapatera, 2018b):

- Nivel 0. No continúa la secuencia: respeta las estructuras espacial y numérica.
- Nivel 1. Continúa la secuencia: utiliza estrategias proporcionales.
- Nivel 2. Realiza generalización cercana.
- Nivel 3. Invierte proceso para términos pequeños: no coordina las estructuras espacial y numérica.
- Nivel 4. Realiza generalización lejana: no establece la función que relaciona el término de la figura y el número de elementos.
- Nivel 5. Expresa regla general: la mayoría divide en lugar de multiplicar.
- Nivel 6. Invierte proceso para términos grandes: no establece la función que relaciona el número de elementos y el término de la figura.
- Nivel 7. Expresa regla general del proceso inverso: no utiliza la indeterminada para expresar algebraicamente la regla general.
- Nivel 8. Expresa algebraicamente la regla general: no utiliza la indeterminada para expresar algebraicamente la regla general en el proceso inverso.
- Nivel 9. Expresa algebraicamente la regla general del proceso inverso.

Estos niveles han sido concretados en otros que guardan relación con las actividades de ajedrez planteadas en este trabajo. Dichos niveles aparecen detallados en el apartado de los resultados.

3.4. Procedimiento

Para la recogida de los datos se dispone de las producciones escritas de los estudiantes, en las que tienen que explicar cómo han resuelto las actividades. Además, se cuenta con el diario de campo del investigador, que recoge las apreciaciones necesarias para complementar las aportaciones de los estudiantes.

Previamente a la puesta en marcha de la intervención, se realiza una evaluación inicial para conocer los conocimientos previos del alumnado acerca de patrones. La estructura de esta prueba consiste en lo siguiente: cuatro series de patrones numéricos, alfabéticos o alfanuméricos, dos series de patrones visuales y una última serie que combina un patrón visual con su correspondiente patrón numérico.

4. Resultados

En las dos primeras actividades se han analizado las estrategias utilizadas, debido a que los alumnos tenían que explicar el proceso que habían realizado para obtener la solución. En las actividades tercera y cuarta, se ha clasificado el nivel de razonamiento de los alumnos, ya que en este caso se les pedía que reflexionaran acerca de la solución obtenida.

Todos los estudiantes resolvieron las actividades propuestas, aunque no todos fueron capaces de explicar las cuestiones que se planteaban, esto podría haberse debido a la corta edad de los participantes y al hecho de no estar acostumbrados a este tipo de tareas. Debido a ello, no se pudieron clasificar todas las respuestas según las estrategias empleadas o el razonamiento producido.

En la primera actividad se presentaba únicamente un patrón visual, con ausencia de los de tipo numérico. Las estrategias que hemos identificado en las respuestas de los alumnos se muestran en la Tabla 1:

Tabla 1. Estrategias identificadas en patrones visuales

Estrategias	N	Ejemplos
Ensayo-error	2	A40: "lo he averiguado porque el caballo va de negro a blanco y he ido probando".
Conteo	1	A22: "contando las casillas, hace 4 movimientos, va desde b1 hasta a3, desde a3 a c2 y de c2 puede ir a a1 o a e1".
Movimiento anterior	3	A17: "tiene que hacer 4 movimientos porque desde algún triángulo ya puedes ir a las esquinas".
Recursiva	5	A19: "siguiendo los movimientos que había hecho antes con los círculos, cuadrados y triángulos" o A35: "siguiendo la secuencia de círculo, cuadrado, triángulo".
Situación real de juego	2	A20: "lo he averiguado como si estuviera jugando, los movimientos son de c3 a b1, de b1 a a3, de a3 a c4 y de c4 a e5".
Distribución geométrica	5	A34: "el movimiento del círculo es en forma circular, los cuadrados en forma de cuadro y a los lados y los triángulos en forma de rombo y encima de otras figuras".

En la Figura 5 se puede observar como A19 codifica las filas y las columnas del tablero con números y letras, respectivamente:

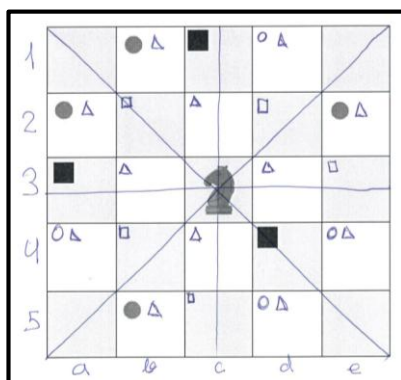


Figura 5. Resolución de la actividad 1 de A19

En la segunda actividad se presentaba un patrón de contenido prioritariamente visual, pero que también contenía aspectos numéricos. Las estrategias que los alumnos han utilizado en esta actividad pueden verse en la Tabla 2:

Tabla 2. Estrategias identificadas en patrones visuales con aspectos numéricos

Estrategia	N	Ejemplos
Conteo	11	A12: "lo he hecho dibujando un cuadrado más en cada parte del final" o A23: "tiene 23 casillas para elegir el rey".
Operación sin uso de patrón (aditiva)	9	A2: "tiene 24 porque 16 más 8 son 24".
Operación sin uso de patrón (multiplicativa)	6	A40: "puede ir a 24 casillas, porque $3 \times 8 = 24$ y tiene una valla más que saltar".
Uso de patrón	1	A15: "son 24 casillas, porque si antes han sido 8 y 16, es la tabla del 8".

En la Figura 6 vemos como A12 ha añadido casillas alrededor del tablero para posteriormente contarlas.

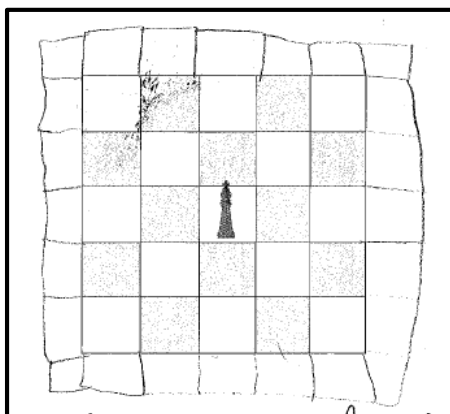


Figura 6. Resolución de la actividad 2 de A12

Es preciso comentar que varios alumnos aplicaban estas estrategias sin utilizar un apoyo visual, como es el caso de A36 (ver Figura 7): “tiene para elegir 24 casillas. Lo he averiguado sumando $16 + 8$ que da 24”. Por otro lado, aquellos que utilizan la estrategia de conteo, suelen necesitar apoyo visual.

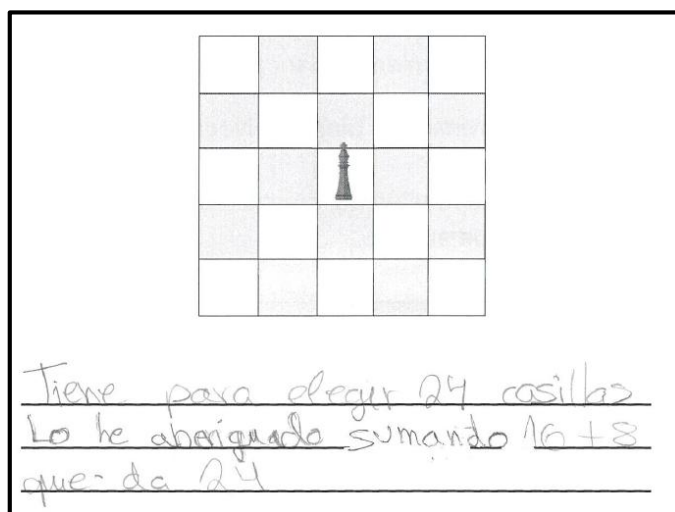


Figura 7. Resolución de la actividad 2 de A36

En la tercera actividad aparecía un patrón de tipo numérico, aunque con algún elemento visual. Se ha clasificado el razonamiento de los alumnos atendiendo a los niveles que aparecen en la Tabla 3:

Tabla 3. Niveles de razonamiento en patrones numéricos con elementos visuales

Nivel	Descripción	N	Ejemplos
Nivel 0. No reconoce el cambio de las letras y números	El alumno todavía no es capaz de producir un razonamiento acorde a la situación planteada	6	A4: “cambia porque el tablero era pequeño y lo he hecho más grande en mi mente”.
Nivel 1. Reconoce que se producen cambios en las letras y números	El alumno ya reconoce que las letras y los números van cambiando a lo largo de la secuencia	14	A19: “cambia un número y tres letras”.
Nivel 2. Analiza la situación desde el inicio	El alumno comienza desde la situación de partida para encontrar el patrón	2	A10: “cambia en orden partiendo de una letra y un número, pero esa letra y número tiene que ser menor de los que van a seguir. Por ejemplo: a, b, c, d... / 1, 2, 3, 4...”.
Nivel 2-3. Identifica que el cambio de los números consiste en una resta sin expresarlo explícitamente	El alumno comprueba que cada número es uno menos que el anterior, pero lo dice con expresiones relacionadas con el ajedrez	1	A15: “los números bajan de 1 en 1”.
Nivel 3. Identifica que los números cambian restando una unidad	El alumno ya utiliza términos relacionados con las matemáticas	3	A23: “los números son uno menos y las letras dos más”.
Nivel 4. Encuentra el patrón correcto	El alumno es capaz de razonar el patrón que se produce	5	A29: “los números cambian restándole 1 y las letras sumándole 3”.

En la Figura 8 vemos el patrón numérico producido por A10.

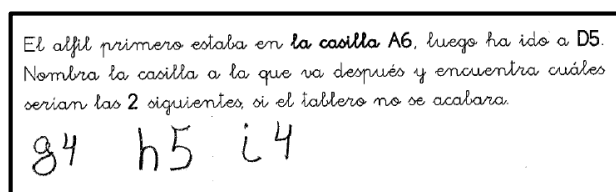


Figura 8. Resolución de la actividad 3 de A10

En la cuarta actividad se trabaja con un patrón numérico, pero se lleva a cabo después de haber realizado una tarea relacionada en la que aparecían patrones visuales. En este caso los niveles de razonamiento que se han encontrado aparecen detallados en la Tabla 4:

Tabla 4. *Niveles de razonamiento en patrones visuales*

Nivel	Descripción	N	Ejemplos
Nivel 0. No identifica ninguna relación	El alumno todavía no es capaz de expresar ningún tipo de relación entre los tres tableros	6	A14: “en el centro abajo están todas las casillas llenas”.
Nivel 1. Reconoce semejanzas en los números	El alumno observa que los números guardan cierta similitud entre sí, pero todavía no explica la relación que hay	5	A22: “muchos tienen los mismos números”.
Nivel 2. Identifica números pares	El alumno comenta que todos los números que aparecen en los tableros son pares	3	A18: “todos los números son pares”.
Nivel 3. Introduce el uso de operaciones	El alumno observa que los números de los tableros están relacionados por operaciones aritméticas	13	A21: “se van sumando de dos en dos”.
Nivel 4. Expresa la relación	El alumno explica que la relación que une los tableros es que el movimiento de la dama es el resultado de la suma de los movimientos de la torre y el alfil	7	A19: “la relación entre ellos es que la torre + alfil = dama” o A17: “la dama une el movimiento de la torre y del alfil”.

En la Figura 9 se muestran los tableros completados por A19.

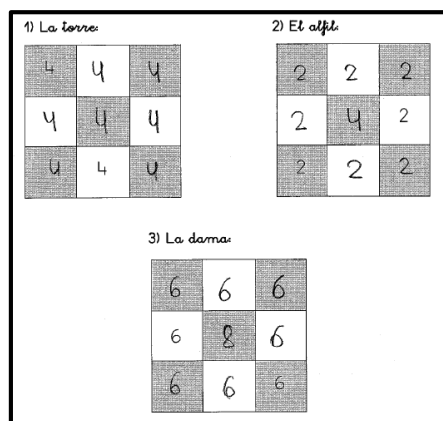


Figura 9. Resolución de la actividad 4 de A19

5. Discusión y conclusiones

Zapatera (2018b) considera el trabajo con patrones como una estrategia para introducir el álgebra temprana. Sin embargo, las pretensiones de este trabajo no van tan lejos, situándose un paso por detrás del *early algebra*, en el ámbito de la geometría y el razonamiento.

Con este trabajo se ha tratado de determinar el tipo de estrategias que emplean los estudiantes de Primaria cuando se presentan tareas de patrones basadas en el ajedrez. En segundo lugar, se pretendía clasificar el nivel de razonamiento del alumnado en este tipo de tareas. Para ello se diseñó una secuencia de actividades utilizando el recurso del ajedrez, en las que aparecían patrones visuales y numéricos. La primera actividad presenta patrones exclusivamente visuales, la segunda incluye algunos elementos numéricos, la tercera presenta patrones numéricos con algún aspecto visual, la cuarta patrones de tipo exclusivamente numérico, aunque anteriormente se realiza una tarea de tipo visual. Como puede verse, lo visual es un elemento inseparable del ajedrez. Esta propuesta se llevó a cabo con alumnos de 4º de Educación Primaria que llevan practicando ajedrez desde Infantil, pero que no habían realizado tareas de patrones anteriormente.

Respecto al primer objetivo formulado, se puede concluir que la estrategia más utilizada en el trabajo con patrones numéricos ha sido el conteo. Esto coincide con lo que observaron Merino *et al.* (2013), ellos defienden que esta estrategia suele utilizarse cuando se trata con números pequeños, mientras que cuando los números son más grandes, los alumnos recurren a otro tipo de estrategia, como es la aplicación de operaciones numéricas. Esto último se ve reflejado en este estudio, ya que determinados alumnos emplearon operaciones como la suma o la multiplicación, en lugar del conteo. Barbosa y Vale (2015) corroboran el uso prioritario del conteo, pero cuando se trata de un patrón visual destacan la estrategia recursiva, al igual que sucede en este trabajo cuando los alumnos atienden a los movimientos anteriores. En cuanto a los patrones visuales, a diferencia de otros estudios previos se ha podido establecer como una de las estrategias más comunes la distribución geométrica, consideramos que su aparición va asociada al recurso utilizado. Un aspecto a resaltar es que cuanto más compleja era la estrategia empleada, menos apoyo visual necesitaban los alumnos. La variedad de estrategias que se ha encontrado, algunas incluso distintas a las de la literatura previa, es una señal de que las actividades diseñadas admiten diversas formas de resolución, aspecto que favorece a la flexibilidad (Nilsson y Juter, 2011).

En cuanto al segundo de los objetivos, se ha encontrado un mayor nivel de razonamiento en las tareas de patrones numéricos. Además, el hecho de no incluir generalizaciones lejanas facilitó la resolución al alumnado, esta idea se ve apoyada por Jurdak y El Mouhayar (2014), autores que reconocen que el trabajo con generalizaciones inmediatas y cercanas resulta más sencillo para los estudiantes. Por otro lado, Zapatera (2018b) recomienda introducir la generalización lejana desde 3º de Primaria, debido a que

presupone un trabajo previo con patrones. Los alumnos que participaron en esta investigación no tenían conocimientos previos acerca del tema, por lo que el hecho de que hayan sabido resolver las actividades propuestas, apunta a que el ajedrez es un recurso adecuado para trabajar con patrones. Esta idea había sido poco explorada anteriormente, Maz-Machado y Jiménez-Fanjul (2012) ya analizaron la potencialidad del ajedrez para aproximar el tema de los patrones al alumnado de Primaria. No obstante, la mayoría de estudios se centran en analizar las ventajas del ajedrez sobre aspectos generales del aprendizaje (Rosholm *et al.*, 2017).

Uno de los resultados más llamativos que se ha encontrado en este trabajo es la relación entre el juego del ajedrez y la geometría. Los alumnos empleaban estrategias en las que ponían de manifiesto el conocimiento de diversos elementos geométricos del tablero de ajedrez, por ejemplo cuando describen la distribución de las piezas y los movimientos efectuados. Ferreira y Palhares (2008) observaron que los ajedrecistas se desenvolvían mejor en tareas de patrones numéricos que en las de visuales, pero desde esta investigación se ha comprobado cómo estudiantes que llevan practicando ajedrez desde la etapa de Infantil se apoyan en aspectos geométricos para resolver actividades de patrones tanto visuales como numéricos. Esta idea de combinar patrones la apoyan autores como Morales *et al.* (2017), quienes recomiendan introducir los patrones lógicos desde edades tempranas, para permitir a los estudiantes que reconozcan la existencia de distintos tipos de patrones.

Otro hallazgo destacable es que la tasa de respuesta en las actividades de patrones numéricos es mayor que en las de visuales. Cuando los alumnos explican el proceso de resolución que han seguido y las estrategias empleadas, aparecen más respuestas en el caso de los patrones que incluyen algún elemento numérico. Sucede algo similar en la tarea de razonamiento, hay un mayor número de estudiantes que alcanzan niveles superiores cuando se presentan patrones numéricos. Cañadas *et al.* (2008) identificaron situaciones semejantes, los alumnos preferían hacer uso de representaciones numéricas, a pesar de que el enunciado contuviese representaciones gráficas. En la base de este hábito, podría encontrarse la preferencia que se otorga a lo largo de la Educación Primaria a las operaciones aritméticas en comparación con otras ramas de la matemática en las que se trabajan los patrones, como es el caso del álgebra (Molina, 2009). El *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) explica que la aritmética es necesaria, siempre y cuando no se trabaje de forma aislada. Los alumnos de 3º a 5º deberían ser capaces de expresar con palabras o símbolos patrones numéricos y geométricos, así como analizar la estructura del patrón para

identificar los cambios que se producen y reconocer cómo continuaría la secuencia. Warren (2005) ya dejó constancia de que en algunos países como Australia es habitual realizar tareas de patrones en la etapa de Primaria.

En esta investigación, se ha encontrado que las actividades que incluían patrones numéricos hacían que el nivel medio del grupo aumentara. Este tipo de patrones son más sencillos que los visuales, ya que en los segundos es más difícil establecer relaciones entre los términos (Vale y Cabrita, 2008). No obstante, no se ha podido establecer ninguna correspondencia entre los niveles de los alumnos en ambos tipos de patrones. Por ello, sería interesante en futuros estudios buscar qué características comparten los alumnos que resuelven mejor los patrones de tipo numérico.

Se ha comprobado que el tablero de ajedrez favorece el trabajo con generalizaciones inmediatas y cercanas. Sin embargo, en este estudio no se ha explorado la posibilidad de incluir tareas de generalización lejana, por lo que otra futura línea de investigación consistiría en analizar las repercusiones de este tipo de generalización, y qué tipo de estrategias utilizan, para comprobar si estas difieren de las que emplean en contextos distintos al del ajedrez (Barbosa y Vale, 2015). Un aspecto a tener en cuenta es el nombre que se asigna a las columnas del tablero, ya que se identifican con las letras del abecedario. Este hecho podría suponer alguna limitación según las tareas de generalización lejana que se plantearan, debido a la dificultad de proceder en la búsqueda de la letra correcta y al número finito de las mismas.

En conclusión, podemos decir que se ha mostrado la capacidad que tiene el ajedrez en el diseño de actividades de patrones (generalización inmediata y cercana), aspecto que puede ayudar a la mejora del currículo no solo del país donde se ha llevado a cabo la experiencia en cuestión, sino a nivel más general, atendiendo a las recomendaciones del NCTM. El ajedrez, cada vez más, puede considerarse un contexto realista, debido a la creciente presencia de este juego en las aulas. Como ya expuso Bishop (1998) es difícil asegurar si el juego produce mejoras en las matemáticas o las matemáticas aportan los conocimientos necesarios para ser mejor jugador. Lejos de querer dar respuesta a la eterna cuestión sobre si la práctica habitual de ajedrez mejora los resultados en matemáticas (Kazemi *et al.*, 2012; Rosholm *et al.*, 2017; Poston y Vandenkieboom, 2019) o si estudiantes con un buen rendimiento en esta asignatura juegan mejor al ajedrez (Sala *et al.*, 2015), desde este trabajo se ha tratado de exponer la utilidad del ajedrez como un recurso adecuado para trabajar un contenido concreto de las matemáticas: los patrones.

Referencias:

- Barbosa, A. y Vale, I. (2015). Visualization in pattern generalization: Potential and Challenges. *Journal of the European Teacher Education Network*, 10, 57-70.
- Bishop, A. (1998). El papel de los juegos en educación matemática. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas*, 18, 9-19.
- Bragg, L. (2007). Students' conflicting attitudes towards games as a vehicle for learning mathematics: A methodological dilemma. *Mathematics Education Research Journal*, 19(1), 29-44. <https://doi.org/10.1007/BF03217448>
- Callejo, M.L. y Zapatera, A. (2017). Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 20, 309-333. <https://doi.org/10.1007/s10857-016-9343-1>
- Cañadas, M.C., Castro, E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA*, 2(3), 137-151
- Ferreira, D. y Palhares, P. (2008). Chess and problem solving involving patterns. *The Mathematics Enthusiast*, 5(2), 249-256.
- Gairín Sallán, J. y Fernández Amigo, J. (2010). Enseñar matemáticas con recursos de ajedrez. *Tendencias Pedagógicas*, 15, 57-90.
- Gliga, F. y Flesner, P.I. (2014). Cognitive benefits of chess training in novice children. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 116, 962-967. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2014.01.328>
- Healy, L. y Hoyles, C. (1999). Visual and symbolic reasoning in mathematics: Making connections with computers? *Mathematical Thinking and learning*, 1(1), 59-84. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0101_3
- Hershkowitz, R., Parzysz, B. y Van Dormolen, J. (1996). Space and shape. En *International handbook of mathematics education* (pp. 161-204). Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_7
- Jurdak, M.E. y El Mouhayar, R.R. (2014). Trends in the development of student level of reasoning in pattern generalization tasks across grade level. *Educational Studies in Mathematics*, 85, 75-92. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9494-2>

- Kazemi, F., Yektayar, M. y Abad, A.M.B. (2012). Investigation the impact of chess play on developing meta-cognitive ability and math problem-solving power of students at different levels of education. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 32, 372-379. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.01.056>
- Kerner, Y. (1994). Case-based evaluation in computer chess. En *European Workshop on Advances in Case-Based Reasoning* (pp. 240-254). Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/3-540-60364-6_40
- Maz-Machado, A. y Jiménez-Fanjul, N. (2012). Ajedrez para trabajar patrones en matemáticas en Educación Primaria. *Épsilon*, 29(2)(81), 105-111. <https://doi.org/10.21071/edmetic.v1i2.2850>
- Merino, E., Cañadas, M.C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 24-40.
- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en Educación Primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.
- Morales, R., Cañadas, M.C. y Castro, E. (2017). Generación y continuación de patrones por dos alumnas de 6-7 años en tareas de seriaciones. *PNA*, 11(4), 233-252.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
- Nilsson, P. y Juter, K. (2011). Flexibility and coordination among acts of visualization and analysis in a pattern generalization activity. *The Journal of Mathematical Behavior*, 30(3), 194-205. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.07.002>
- Nortes Martínez-Artero, R. y Nortes Checa, A. (2015). El ajedrez como recurso didáctico en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. *Números*, 89, 9-31.
- Pawa, S., Laosinchai, P., Nokkaew, A. y Wongkia, W. (2020). Students' conception of set theory through a board game and an active-learning unit. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education*, 28(1), 1-15. <https://doi.org/10.30722/IJISME.28.01.001>
- Pérez Serrano, G. (2004). *Investigación cualitativa : retos e interrogantes*. Madrid, España: La Muralla.

Trabajo con patrones a través de actividades basadas en el ajedrez. Un estudio sobre estrategias y niveles de razonamiento de los estudiantes de Educación Primaria

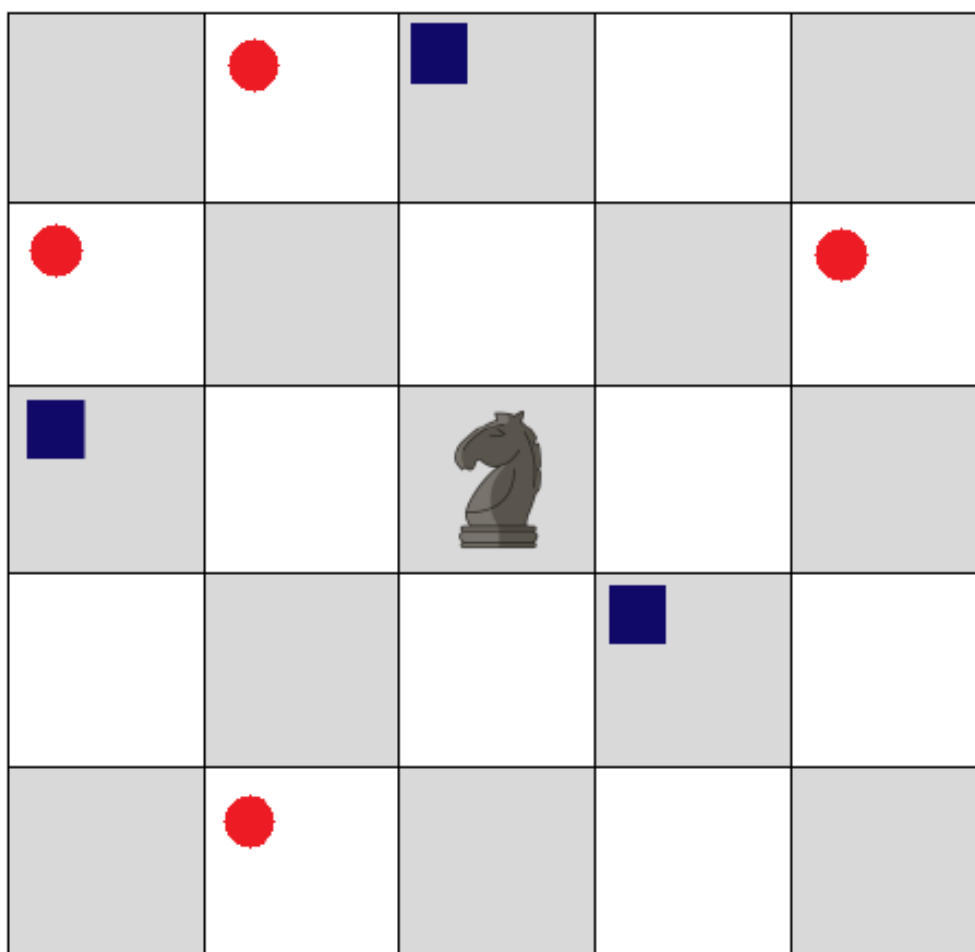
- Presmeg, N.C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational studies in mathematics*, 23(6), 595-610. <https://doi.org/10.1007/BF00540062>
- Poston, D.I. y Vandenkieboom, K.K. (2019). The Effect of Chess on Standardized Test Score Gains. *SAGE Open*, 9(3), 1-22. <https://doi.org/10.1177/2158244019870787>
- Radford, L. (2002). Generalizing geometric-numeric patterns: Metaphors, indexes and other students' semiotic devices. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education: An International Journal*, 1 (2), 63-72.
- Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19. <https://doi.org/10.1080/14794800903569741>
- Ramírez, R., Brizuela, B.M. y Ayala-Altamirano, C. (2020). Word problems associated with the use of functional strategies among grade 4 students. *Mathematics Education Research Journal*, 32(3), 1-25. <https://doi.org/10.1007/s13394-020-00346-7>
- Reid, D.A. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for research in mathematics education*, 33(1), 5-29. <https://doi.org/10.2307/749867>
- Resnik, M. (1981). Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference. *Noûs*, 15(4), 529-550. <https://doi.org/10.2307/2214851>
- Rivera, F.D. (2010). Second grade students' preinstructional competence in patterning activity. En Pinto, M.F. y Kawasaki, T.F. (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, (pp. 81-88). Belo Horizonte, Brazil: PME.
- Rosholm, M., Mikkelsen, M.B. y Gumede, K. (2017). Your move: The effect of chess on mathematics test scores. *PloS one*, 12(5). <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0177257>
- Sala, G., Gorini, A., y Pravettoni, G. (2015). Mathematical problem-solving abilities and chess: an experimental study on young pupils. *Sage Open*, 5(3), 1-9. <https://doi.org/10.1177/2158244015596050>
- Sigirtmac, A.D. (2016). An investigation on the effectiveness of chess training on creativity and theory of mind development at early childhood. *Educational Research and Reviews*, 11(11), 1056-1063. <https://doi.org/10.5897/ERR2016.2676>

- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 147-164. <https://doi.org/10.1007/BF00579460>
- Thornton, S. (2001). A picture is worth a thousand words. En Rogerson, A. (Ed.), *New ideas in mathematics education: Proceedings of the International Conference of the Mathematics Education into the 21st Century Project* (pp. 251-256). Ciechocinek, Poland: The Future of Mathematics Education.
- Vale, I. y Cabrita, I. (2008). Learning through patterns: a powerful approach to algebraic thinking. *ETEN*, 18, 63-69.
- Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 305-312). Melbourne, Australia: PME.
- Yeo, J.B. (2007). *Mathematical tasks: Clarification, classification and choice of suitable tasks for different types of learning and assessment*. Mathematics and Mathematics Education technical report series.
- Zapatera Llinares, A. (2018a). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones: una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números*, 97, 51-67. <https://dx.doi.org/10.12802/relime.18.2114>
- Zapatera Llinares, A. (2018b). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de Generalización de Patrones. Una trayectoria de Aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 21(1), 87-114. <https://doi.org/10.12802/relime.18.2114>

Anexos:

Anexo 1. Primera actividad

En este tablero se muestran algunas de las casillas a las que puede acudir el caballo realizando un movimiento (círculos) y realizando dos movimientos (cuadrados). Completa las casillas que faltan.



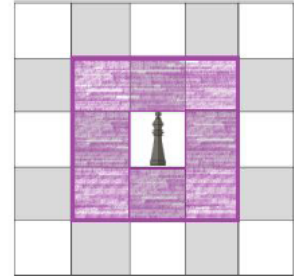
- Encuentra ahora tú las casillas a las que puede ir con su tercer movimiento. Márcalas con un triángulo.
- Dibuja en el tablero los ejes de simetría que encuentres.

El caballo todavía no ha ido a algunas casillas. ¿Cuántos movimientos tiene que hacer para ir a ellas? Explica cómo lo has averiguado:

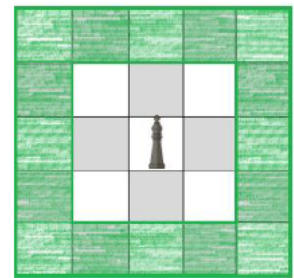
Anexo 2. Segunda actividad

Este rey quiere alejarse todo lo posible. Ayúdale a escapar:

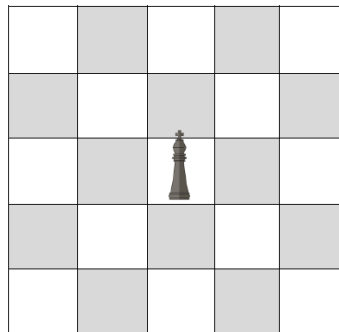
Si realiza **un** movimiento, tiene **8** casillas para elegir.



Si realiza **dos** movimientos, tiene **16** casillas para elegir.

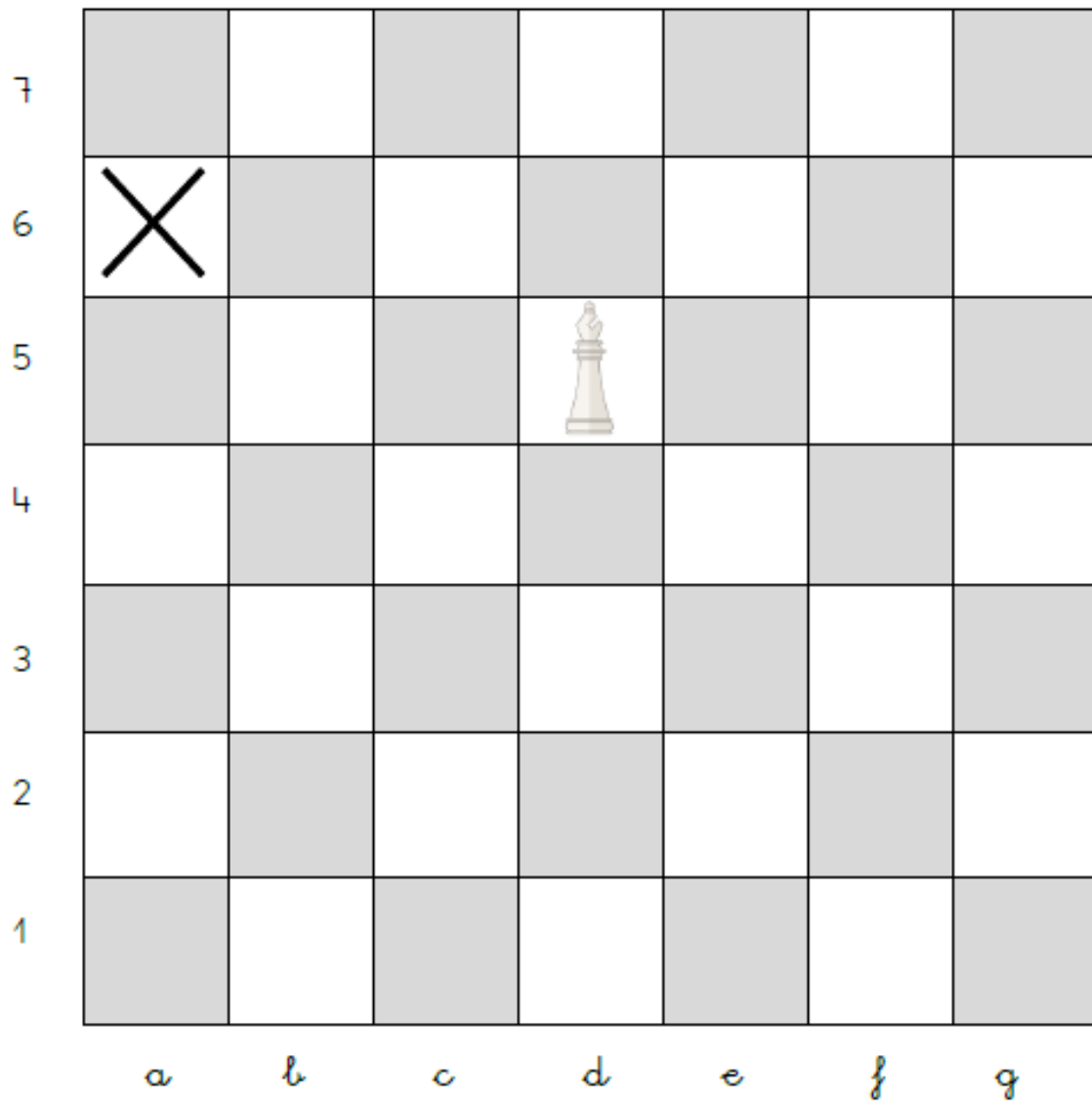


Si realiza **tres** movimientos, ¿cuántas casillas tiene para elegir?

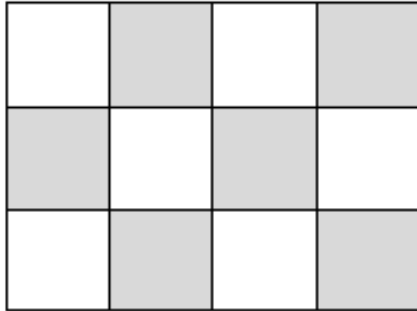


Anexo 3. Tercera actividad

Este alfil se ha desplazado de la casilla marcada con una equis (x) a la casilla d5. Siempre se mueve de la misma manera. Encuentra la siguiente casilla a la que llegará:



Dibuja con flechas (↗↘↙↖) el movimiento que realiza el alfil para desplazarse. Hay más de una solución posible.



El alfil primero estaba en la casilla a6, luego ha ido a d5. Nombra la casilla a la que va después y encuentra cuáles serían las 2 siguientes, si el tablero no se acabara.

Explicale a un amigo cómo cambian las letras y los números:

Anexo 4. Cuarta actividad

Aquí puedes ver el número de casillas a las que amenazan estas piezas desde distintas posiciones. Completa los tableros:

1) La torre:

4		
	4	

2) El alfil:

		2
2		

3) La dama:

6		
		6

Compara los tableros que acabas de rellenar. ¿Qué relación observas entre ellos? ¿Por qué crees que pasa esto?